Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA SUPLEMENTAR 4

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Formas canónicas de Jordan

(1) Para cada uma das matrizes A seguintes, determine uma forma canónica de Jordan J, e uma matriz de mudança de base S tal que $A = SJS^{-1}$.

(a)
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução:

(a) *A matriz A é um bloco de Jordan, portanto $J = A$ e*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

(b) *Os valores próprios da matriz são as soluções de*

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff (1-\lambda)^2 + 4 = 0 \iff \lambda = 1 \pm 2i .$$

Conclui-se que uma forma canónica de Jordan de A é

$$J = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix} .$$

Os vectores próprios associados a $1+2i$ são os vectores $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ que verificam

$$\begin{bmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -ia = b .$$

Uma base do espaço próprio de $1+2i$ é constituída pelo vector

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} .$$

Os vectores próprios associados a $1-2i$ são os vectores $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ que verificam

$$\begin{bmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff ia = b .$$

Uma base do espaço próprio de $1-2i$ é constituída pelo vector

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} .$$

Portanto uma matriz de mudança de base que põe A em forma canónica é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} .$$

(c) *Os valores próprios da matriz são as soluções da equação*

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \iff (\lambda-2)^2 = 0 \ .$$

Logo A tem apenas um valor próprio, $\lambda = 2$. Uma vez que a matriz não é igual a $2I$ (onde I é a matriz identidade), o espaço próprio tem necessariamente dimensão 1 e portanto a forma canónica de Jordan de A é

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \ .$$

Os vectores próprios de A são os que verificam $(A-2I)v = 0$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff b = -a \ .$$

Uma base dos vectores próprios é formada, por exemplo, pelo vector

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \ .$$

Um vector próprio generalizado é um vector w que satisfaz $(A-2I)w = v$. Podemos tomar, por exemplo,

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ .$$

Conclui-se que uma matriz de mudança de base que põe A em forma canónica é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

(d) *Os valores próprios da matriz são as soluções da equação*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \iff \\ -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) + (1-\lambda) &= 0 \iff \\ (1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1) &= 0 \iff \\ (1-\lambda)(1-\lambda)^2 &= 0 \iff \\ (1-\lambda)^3 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Logo A tem apenas um valor próprio, $\lambda = 1$. Os vectores próprios são os que verificam

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff c = b - a \ .$$

Uma base do espaço próprio é constituída pelos vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que se obtiveram fazendo $a = 1, b = 1$ e $a = -1, b = 0$, respectivamente. Conclui-se que uma forma canónica de Jordan de A é

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Falta achar um vector próprio generalizado correspondente à terceira coluna de J. Esse vector será uma solução de

$$(A - I)w = v$$

onde v é um vector próprio correspondente ao valor próprio 1 que gera o espaço das colunas da matriz $(A - I)$. Uma vez que

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

o espaço das colunas é gerado por $v_1 + v_2$. Assim, procura-se uma solução de

$$(A - I)w = v_1 + v_2 \ .$$

Toma-se, por exemplo,

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, uma matriz de mudança de base que põe A em forma canónica é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

onde a primeira coluna é o vector próprio v_1, a segunda coluna é o vector próprio $v_1 + v_2$ e a terceira coluna é o vector próprio generalizado w associado a $v_1 + v_2$.

□

(2) Para cada uma das matrizes A seguintes, determine uma forma canónica de Jordan J, e uma matriz de mudança de base S tal que $A = SJS^{-1}$.

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(e)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(f)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Exponencial de Matrizes

(3) Para cada uma das matrizes A seguintes, determine e^{At}.

(a)
$$A = \begin{bmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 2\pi \end{bmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

(e)
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} .$$

Resolução:

(a) *A exponencial de uma matriz diagonal, At, é a matriz diagonal cujas entradas são as usuais exponenciais escalares das entradas correspondentes em At. Deste modo,*
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-\pi t} & 0 \\ 0 & e^{2\pi t} \end{bmatrix} .$$

(b) *Os valores próprios de A são dados por*
$$(1-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda = 0 \iff \lambda = 0 \quad \textit{ou} \quad \lambda = 2 .$$
Os vectores próprios associados ao valor próprio 0 são dados por
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -a = b .$$
Os vectores próprios associados ao valor próprio 2 são dados por
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = b .$$
Portanto,
$$e^{At} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} e^{0t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1+e^{2t}}{2} & \frac{-1+e^{2t}}{2} \\ \frac{-1+e^{2t}}{2} & \frac{1+e^{2t}}{2} \end{bmatrix} .$$

(c) *A matriz A tem apenas um valor próprio, $\lambda = 1$, o qual tem um espaço próprio de dimensão 1. Um vector próprio é uma solução de $(A - I)v = 0$, isto é,*
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0$$
Por exemplo pode-se tomar
$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

Um vector próprio generalizado w, obtém-se resolvendo a equação $(A-I)w=v$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w = v$$

Por exemplo, pode-se tomar

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} ,$$

Relativamente, à base (v,w), a transformação linear representada por A é dada por um bloco de Jordan, J, para o valor próprio 1, ou seja,

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

Logo, a exponencial é

$$e^{At} = S \underbrace{\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} S^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$$

Comentário: *Notando que $\frac{1}{2}A$ é um bloco de Jordan para o valor próprio $\frac{1}{2}$, podia-se, em alternativa, calcular*

$$e^{\frac{1}{2}At} = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} & te^{\frac{1}{2}t} \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}$$

e avaliar em $2t$. ♢

(d) *Os valores próprios de A são dados por*

$$\begin{aligned} (4-\lambda)(-2-\lambda)+10=0 \quad &\iff \quad \lambda^2-2\lambda+2=0 \\ &\iff \quad \lambda = 1 \pm i\ . \end{aligned}$$

Os vectores próprios (complexos) associados ao valor próprio $\lambda = 1+i$ são dados por

$$\begin{bmatrix} 3-i & 5 \\ -2 & -3-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \iff \quad b = \frac{i-3}{5} a\ .$$

Os vectores próprios para o valor próprio $1-i$ são dados por

$$\begin{bmatrix} 3+i & 5 \\ -2 & -3+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \iff \quad b = \frac{-3-i}{5} a\ .$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{i-3}{5} & \frac{-3-i}{5} \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1-3i}{2} & \frac{-5i}{2} \\ \frac{1+3i}{2} & \frac{5i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= e^t \begin{bmatrix} \frac{(e^{it}+e^{-it})-3i(e^{it}-e^{-it})}{2} & \frac{-5i(e^{it}-e^{-it})}{2} \\ i(e^{it}-e^{-it}) & \frac{(e^{it}+e^{-it})+3i(e^{it}-e^{-it})}{2} \end{bmatrix} \\ &= e^t \begin{bmatrix} \cos t + 3\sin t & 5\sin t \\ -2\sin t & \cos t - 3\sin t \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Comentário: *Se λ é valor próprio complexo da matriz real A com o vector próprio v, então o seu complexo conjugado também é valor próprio de A e o vector complexo conjugado de v é um vector próprio correspondente: $Av = \lambda v \implies \overline{Av} = \overline{\lambda v} \implies A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Esta observação permite simplificar cálculos.* ♢

(e) *A matriz é um bloco de Jordan 3 por 3.*

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{5t} & te^{5t} & \frac{t^2}{2}e^{5t} \\ 0 & e^{5t} & te^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix} .$$

□

Sistemas de Equações Lineares

(4) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

(a) Quais são os valores próprios de A?
(b) Quais são os vectores próprios de A?
(c) Determine uma matriz de mudança de base, S, que diagonaliza A, e determine a sua inversa, S^{-1}.
(d) Calcule e^{At}.
(e) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} .$$

(f) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} .$$

(g) Escreva duas funções $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que constituam uma base do espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior.

Resolução:

(a) *Os valores próprios são os zeros do polinómio característico:*

$$p(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 4 .$$

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \iff \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 3 .$$

Os valores próprios de A são -1 e 3.

(b) *Um vector v é vector próprio de A associado ao valor próprio λ se e só se $Av = \lambda v$, ou seja, se e só se $(A - \lambda I)v = 0$. Em componentes, escreve-se $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.*

Equação para os vectores próprios associados ao valor próprio -1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \iff \qquad -a = b .$$

Os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = -1$ são

$$v = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad a \in \mathbb{R} .$$

Equação para os vectores próprios associados ao valor próprio 3*:*

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = b \ .$$

Os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 3$ *são*

$$v = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad a \in \mathbb{R} \ .$$

(c) *Mudando para uma base de vectores próprios de* A*, a transformação linear fica diagonal. Tome-se, por exemplo, a matriz de mudança de base*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

cujas colunas são vectores próprios de A *associados aos valores próprios -1 e 3. A mudança inversa é*

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

Então tem-se

$$A = S \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} S^{-1} \ .$$

(d) *De acordo com a alínea anterior,*

$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} & \frac{-e^{-t}+e^{3t}}{2} \\ \frac{-e^{-t}+e^{3t}}{2} & \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} \end{bmatrix} .$$

(e) *A solução do problema de valor inicial dado é*

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} & \frac{-e^{-t}+e^{3t}}{2} \\ \frac{-e^{-t}+e^{3t}}{2} & \frac{e^{-t}+e^{3t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e^{-t} + 6e^{3t} \\ e^{-t} + 6e^{3t} \end{bmatrix} , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

(f) *A solução geral da equação diferencial dada é*

$$\begin{aligned} y(t) &= S \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \\ -c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \end{bmatrix} , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(g) *Compõe-se uma base para o espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior com as colunas da matriz*

$$S \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -e^{-t} & e^{3t} \end{bmatrix} ,$$

ou seja, com as funções $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *e* $x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dadas por*

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} .$$

De facto, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são funções linearmente independentes e qualquer solução $y(t)$ da equação da alínea anterior é da forma $y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ para algum $c_1 \in \mathbb{R}$ e algum $c_2 \in \mathbb{R}$.

□

(5) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule e^{At}.

(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

(c) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= & 3y_1 & +y_2 & +e^{2t} \\ \dot{y}_2 &= & -y_1 & +y_2 & \end{cases} .$$

Resolução:

(a) *Os valores próprios de A são dados por*

$$\begin{aligned} (3-\lambda)(1-\lambda)+1=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda = 2 . \end{aligned}$$

Os vectores próprios associados ao valor próprio 2 são dados por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad -a = b .$$

Como quaisquer dois vectores próprios são linearmente dependentes, escolhe-se um vector próprio, por exemplo,

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ,$$

e procura-se um vector próprio generalizado, w:

$$\begin{aligned} (A-\lambda I)w = v \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad a + b = 1 . \end{aligned}$$

Por exemplo,

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é vector próprio generalizado. Portanto,

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

(b) *A solução do problema de valor inicial é dada por:*

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}y(0) \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \; . \end{aligned}$$

(c) *Esta equação diferencial pode ser escrita matricialmente na seguinte forma:*

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + b(t) \qquad \text{onde} \qquad b(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} \; .$$

A sua solução geral é dada pela fórmula de variação das constantes:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}c + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)\, ds \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \int_0^t \begin{bmatrix} (1+t-s)e^{2(t-s)} & (t-s)e^{2(t-s)} \\ -(t-s)e^{2(t-s)} & (1-t+s)e^{2(t-s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2s} \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} c_1(1+t) + c_2 t \\ -c_1 t + c_2(1-t) \end{bmatrix} + e^{2t} \int_0^t \begin{bmatrix} 1+t-s \\ -t+s \end{bmatrix} ds \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} c_1(1+t) + c_2 t + t + \frac{t^2}{2} \\ -c_1 t + c_2(1-t) - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \; , \end{aligned}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

□

(6) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \; .$$

(a) Calcule e^{At}.
(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{4t} \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; .$$

(7) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \; .$$

(a) Calcule e^{At}.
(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \; .$$

(8)

Considere a equação diferencial

$$\begin{bmatrix} \dot y_1 \\ \dot y_2 \\ \dot y_3 \\ \dot y_4 \\ \dot y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & & & \\ -2 & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \qquad (\star)$$

onde as entradas omitidas na matriz são zeros.

(a) Determine a solução de $(\star)$ com condição inicial

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 \ , \quad y_3(0) = y_4(0) = -y_5(0) = 1 \ .$$

(b) Determine a solução de $(\star)$ com condição inicial

$$y_1(0) = 1 \ , \quad y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = 0 \ .$$

(c) Determine o conjunto de todas as condições iniciais, $y_0 \in \mathbb{R}^5$, tais que as correspondentes soluções do problema de valor inicial

$$\begin{cases} (\star) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

são limitadas.

Resolução: *Seja A a matriz dos coeficientes. A solução de um problema de valor inicial*

$$\text{equação } (\star) \qquad \text{com} \qquad y(t_0) = y_0$$

é

$$y(t) = e^{At} y_0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

Para calcular a exponencial da matriz At aproveitam-se os cálculos do exercício 3 alíneas (b) e (d):

Se $A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, *então*

$$e^{A_1 t} = e^t \begin{bmatrix} \cos t + 3\sin t & 5\sin t \\ -2\sin t & \cos t - 3\sin t \end{bmatrix} \ .$$

Se $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, *então*

$$e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} \frac{e^{2t}+1}{2} & \frac{e^{2t}-1}{2} \\ \frac{e^{2t}-1}{2} & \frac{e^{2t}+1}{2} \end{bmatrix} \ .$$

Como

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} A_1 & & \\ \hline & -2 & \\ \hline & & A_2 \end{array}\right] \ ,$$

tem-se que

$$e^{At} = \left[\begin{array}{c|c|c} e^{A_1 t} & & \\ \hline & e^{-2t} & \\ \hline & & e^{A_2 t} \end{array}\right] \ .$$

(a) *A solução de $(\star)$ com condição inicial*

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 \ , \quad y_3(0) = y_4(0) = -y_5(0) = 1$$

é

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

(b) *A solução de* ($\star$) *com condição inicial*

$$y_1(0) = 1 \ , \quad y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = 0$$

é

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t + 3\sin t \\ -2\sin t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(c) *A solução de um problema de valor inicial*

$$\text{equação } (\star) \qquad \text{com} \qquad y(0) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

é

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^t\cos t + 3e^t \sin t & 5e^t \sin t & & & \\ -2e^t \sin t & e^t \cos t - 3e^t \sin t & & & \\ & & e^{-2t} & & \\ & & & \frac{e^{2t}+1}{2} & \frac{e^{2t}-1}{2} \\ & & & \frac{e^{2t}-1}{2} & \frac{e^{2t}+1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} .$$

A exponencial e^{At} *envolve as seguintes funções elementares*

$$e^t \cos t \ , \quad e^t \sin t \ , \quad e^{-2t} \ , \quad 1 \ , \quad e^{2t} \ .$$

A única função limitada desta lista é a constante 1*. Para que uma solução seja limitada, as condições iniciais,* $y(0)$*, devem ser tais que todas as outras funções não apareçam. Logo, terá que ser*

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \qquad e \qquad a_4 = -a_5 \ .$$

O conjunto de todas as condições iniciais tais que as correspondentes soluções do problema de valor inicial são limitadas é

$$\left\{ y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \\ -a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} .$$

□

(9) Considere o sistema de equações diferenciais

$$(\star\star)\quad \begin{cases} \dot{y}_1 &= -(\sin t) y_1 + e^{\cos t} \\ \dot{y}_2 &= e^{\sin t - \cos t} y_1 + (\cos t) y_2 + 3te^{\sin t} \ . \end{cases}$$

(a) Determine a solução geral do sistema homogéneo associado:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= -(\sin t) y_1 \\ \dot{y}_2 &= e^{\sin t - \cos t} y_1 + (\cos t) y_2 \ . \end{cases}$$

(b) Determine a solução geral de $(\star\star)$.

(c) Determine a solução de $(\star\star)$ com condição inicial:

$$y_1(0) = 1 \quad \text{e} \quad y_2(0) = 0 \ .$$

Resolução:

(a) *O sistema homogéneo pode ser resolvido em duas etapas.*
Primeiro resolve-se a primeira equação

$$\dot{y}_1 = -(\sin t) y_1 \ .$$

Para $y_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \tfrac{\dot{y}_1}{y_1} = -\sin t \quad &\iff \quad \textstyle\int \tfrac{\dot{y}_1}{y_1}\, dt = -\int \sin t\, dt + c \\ &\iff \quad \textstyle\int \tfrac{1}{y_1}\, dy_1 = \cos t + c \\ &\iff \quad \ln |y_1| = \cos t + c \\ &\iff \quad |y_1(t)| = k_1 e^{\cos t} \qquad \textit{onde } k_1 > 0 \\ &\iff \quad y_1(t) = k_1 e^{\cos t} \qquad \textit{onde } k_1 \neq 0 \ . \end{aligned}$$

Quando y_1 *se anula, tem-se que* $y_1(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, *também é solução. Logo, a solução geral da primeira equação é*

$$y_1(t) = k_1 e^{\cos t} \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ , \qquad \textit{onde } k_1 \in \mathbb{R} \ .$$

De seguida, substitui-se a expressão geral para y_1 *na segunda equação e resolve-se para obter* y_2*:*

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= e^{\sin t - \cos t} \left(k_1 e^{\cos t} \right) + (\cos t) y_2 \\ &= k_1 e^{\sin t} + \underbrace{(\cos t)}_{-a(t)} y_2 \ . \end{aligned}$$

Esta equação linear admite o factor de integração

$$e^{\int a(t)\, dt} = e^{-\sin t} \ .$$

Mutiplicada por $e^{-\sin t}$, *a equação fica*

$$\begin{aligned} & e^{-\sin t} \dot{y}_2 - (\cos t) e^{-\sin t} y_2 = k_1 \\ \iff \quad & \tfrac{d}{dt} \left(e^{-\sin t} y_2 \right) = k_1 \\ \iff \quad & e^{-\sin t} y_2 = k_1 t + k_2 \\ \iff \quad & y_2(t) = (k_1 t + k_2) e^{\sin t} \ . \end{aligned}$$

A solução geral do sistema homogéneo é:

$$\begin{cases} y_1(t) &= k_1 e^{\cos t} \\ \\ y_2(t) &= (k_1 t + k_2) e^{\sin t} \ , \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

(b) *A solução geral de* $(\star\star)$ *pode ser obtida a partir da solução geral do sistema homogéneo pela fórmula de variação das constantes:*

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Y(t) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \int_0^t Y(t) Y(s)^{-1} \begin{bmatrix} e^{\cos s} \\ 3s e^{\sin s} \end{bmatrix} ds \ ,$$

onde $Y(t)$ *é uma solução matricial fundamental do sistema homogéneo. Obtém-se uma tal matriz* $Y(t)$ *tomando para colunas soluções linearmente independentes do sistema homogéneo, como por exemplo*

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & t e^{\sin t} \end{bmatrix}$$

onde se fixou $k_1 = 0, k_2 = 1$ *para a primeira coluna e* $k_1 = 1, k_2 = 0$ *para a segunda. Com esta escolha, a inversa de* $Y(s)$ *é*

$$Y(s)^{-1} = \frac{-1}{e^{\cos s + \sin s}} \begin{bmatrix} s e^{\sin s} & -e^{\cos s} \\ -e^{\sin s} & 0 \end{bmatrix} .$$

Assim, a solução geral de $(\star\star)$ *é*

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \\
= \ &\begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & t e^{\sin t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & t e^{\sin t} \end{bmatrix} \int_0^t \frac{-1}{e^{\cos s + \sin s}} \begin{bmatrix} s e^{\sin s} & -e^{\cos s} \\ -e^{\sin s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\cos s} \\ 3s e^{\sin s} \end{bmatrix} ds \\
= \ &\begin{bmatrix} c_2 e^{\cos t} \\ c_1 e^{\sin t} + c_2 t e^{\sin t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & t e^{\sin t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} 2s \\ 1 \end{bmatrix} ds \\
= \ &\begin{bmatrix} c_2 e^{\cos t} \\ c_1 e^{\sin t} + c_2 t e^{\sin t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & t e^{\sin t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} \\
= \ &\begin{bmatrix} (c_2 + t) e^{\cos t} \\ (c_1 + c_2 t + 2t^2) e^{\sin t} \end{bmatrix} , \quad \forall t \in \mathbb{R} \ , \quad \textit{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .
\end{aligned}$$

(c) *A solução deste problema de valor inicial pode ser obtida a partir da solução geral do sistema homogéneo pela fórmula de variação das constantes:*

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Y(t) Y(0)^{-1} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t Y(t) Y(s)^{-1} \begin{bmatrix} e^{\cos s} \\ 3s e^{\sin s} \end{bmatrix} ds \ ,$$

onde $Y(t)$ é uma solução matricial fundamental do sistema homogéneo, como por exemplo a utilizada na alínea anterior. Fazendo os cálculos,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & e^{\cos t} \\ e^{\sin t} & te^{\sin t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^{\cos t} \\ 2t^2 e^{\sin t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-1}e^{\cos t} \\ e^{-1}te^{\sin t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^{\cos t} \\ 2t^2 e^{\sin t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (e^{-1}+t)e^{\cos t} \\ (e^{-1}t+2t^2)e^{\sin t} \end{bmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .
\end{aligned}$$

□

(10) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Resolução: *Começa-se por resolver a segunda equação escalar que dá y_2:*

$$\frac{dy_2}{dt} = 2y_2 \qquad \textit{com} \qquad y_2(0) = 0 \ .$$

A solução é

$$y_2(t) = 0 \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

Substituindo y_2, resolve-se agora a terceira equação escalar que dá y_3:

$$\frac{dy_3}{dt} = 3y_3 + e^{2t} \qquad \textit{com} \qquad y_3(0) = 0 \ .$$

A solução é

$$y_3(t) = \int_0^t e^{3(t-s)} e^{2s} ds = e^{3t} - e^{2t} \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

Finalmente, substitui-se y_3 e resolve-se a primeira equação escalar que dá y_1:

$$\frac{dy_1}{dt} = 2y_1 + e^{3t} \qquad \textit{com} \qquad y_1(0) = 0 \ .$$

A solução é

$$y_1(t) = \int_0^t e^{2(t-s)} e^{3s} ds = e^{3t} - e^{2t} \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

O problema de valor inicial dado tem a seguinte solução:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} - e^{2t} \\ 0 \\ e^{3t} - e^{2t} \end{bmatrix} \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

□

Comentário: *Em alternativa, pode-se calcular a exponencial da matriz dos coeficientes e aplicar a fórmula de variação das constantes para sistemas de equações lineares.* ◇

(11) Suponha que as funções

$$\begin{bmatrix} e^t + e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} e^t - e^{3t} \\ -e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix}$$

são três soluções $y(t)$ da equação $\dot{y} = Ay$. Determine os valores próprios de A. Justifique.

Resolução: *Pela fórmula de variação das constantes, as soluções de sistemas lineares de equações de primeira ordem homogéneas, $\dot{y} = Ay$, são combinações lineares de exponenciais multiplicadas por potências de t da forma $t^k e^{\lambda t}$, onde λ é um valor próprio complexo da matriz dos coeficientes, A.*

As três funções dadas envolvem as exponenciais e^t, e^{2t} e e^{3t} e o sistema de equações é 3 por 3.

Logo, os valores próprios de A são 1, 2 e 3. □

Equações de Ordem Superior à Primeira

(12) Considere a equação diferencial escalar

$$y^{(2)} + y = \cos t \ . \qquad (\star)$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea associada a $(\star)$.
(b) Determine uma solução particular de $(\star)$.
(c) Determine a solução geral de $(\star)$.

Resolução:

(a) *A equação homogénea associada a $(\star)$ é*

$$y^{(2)} + y = 0 \iff (D^2 + 1)y = 0 \ .$$

O seu polinómio característico,

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 \ ,$$

tem as seguintes raízes:

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda = \pm i \ .$$

A solução geral complexa *da equação homogénea é pois*

$$y(t) = k_1 e^{it} + k_2 e^{-it} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$.
A solução geral (real) da equação homogénea é

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Comentário: *A solução geral real obtém-se extraindo as partes real e imaginária da solução geral complexa, usando a fórmula de Euler:*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \ .$$

Reorganiza-se e rebaptiza-se as constantes para simplificar a expressão final. Convém fazer o exercício de passagem da solução geral complexa para a solução geral real. ♢

(b) *Adopta-se o método dos coeficientes indeterminados:*
A função $\cos t$ *é aniquilada pelo operador diferencial* D^2+1. *Se* $y(t)$ *for solução particular de* $(\star)$, *i.e,*

$$(D^2+1)y = \cos t \ ,$$

então, aplicando D^2+1 *a ambos os membros, fica*

$$(D^2+1)(D^2+1)y = (D^2+1)\cos t = 0 \ .$$

Vai-se procurar uma solução particular de $(\star)$ *entre a solução geral da equação homogénea*

$$(D^2+1)^2 y = 0$$

a qual é dada por

$$y(t) = \underbrace{c_1\cos t + c_2\sin t}+c_3 t\cos t + c_4 t\sin t \ .$$

Os dois primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada a $(\star)$, *logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação* não-*homogénea* $(\star)$. *Para encontrar uma solução particular, substitui-se* $y(t) = c_3 t\cos t + c_4 t\sin t$ *em* $(\star)$ *e determina-se os coeficientes* c_3 *e* c_4*:*

$$\begin{aligned} & (D^2+1)(c_3 t\cos t + c_4 t\sin t) = \cos t \\ \Longleftrightarrow\quad & -2c_3\sin t + 2c_4\cos t = \cos t \\ \Longleftrightarrow\quad & c_3 = 0 \quad \text{e} \quad c_4 = \tfrac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Conclui-se que uma solução particular de $(\star)$ *é, por exemplo,* $y(t) = \frac{1}{2}t\sin t$ *para qualquer* $t\in\mathbb{R}$.

(c) *Como se trata de uma equação linear, a solução geral de* $(\star)$ *é da forma*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{solução particular} \\ \textit{de } (\star) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \textit{solução geral da equação} \\ \textit{homogénea associada a } (\star) \end{array} \right\}$$

Assim, a solução geral de $(\star)$ *é*

$$y(t) = \tfrac{1}{2}t\sin t + c_1\cos t + c_2\sin t \qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

□

(13) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais escalares.

(a)
$$y^{(3)} + \dot{y} = 0 \ ,$$

(b)
$$y^{(3)} + \dot{y} = e^t \ ,$$

(c)
$$y^{(3)} + \dot{y} = te^t \ ,$$

(d)
$$y^{(3)} + \dot{y} = 1 \ ,$$

(e)
$$y^{(3)} + \dot{y} = 1 + \cos t \ ,$$

(f)
$$y^{(3)} + \dot{y} = e^{2t}\cos t \ .$$

Resolução:

(a) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^3 + D)y = 0 \ .$$

O seu polinómio característico,

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda \ ,$$

tem as raízes

$$p(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \pm i \ .$$

A solução geral complexa *da equação homogénea é pois*

$$y(t) = k_0 + k_1 e^{it} + k_2 e^{-it} \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ ,$$

onde $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$.
A solução geral (real) da equação homogénea é

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ ,$$

onde $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Comentário: *A solução geral real obtém-se extraindo as partes real e imaginária da solução geral complexa, usando a fórmula de Euler:*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \ .$$

Reorganiza-se e rebaptiza-se as constantes para simplificar a expressão final. Recomenda-se o exercício de passagem da solução geral complexa para a solução geral real. ♢

(b) *Como se trata de uma equação linear, a solução geral é da forma*

$$\{ \text{ solução particular } \} + \left\{ \begin{array}{c} \text{solução geral da equação} \\ \text{homogénea associada} \end{array} \right\} .$$

Para determinar uma solução particular, adopta-se o método dos coeficientes indeterminados. A função e^t *é aniquilada pelo operador diferencial* $D - 1$*. Se* $y(t)$ *for solução particular da equação dada, i.e,*

$$D(D^2 + 1)y = e^t \ ,$$

então, aplicando $D - 1$ *a ambos os membros, fica*

$$(D - 1)D(D^2 + 1)y = (D - 1)e^t = 0 \ .$$

Assim, vai-se procurar uma solução particular entre a solução geral da equação homogénea

$$(D - 1)D(D^2 + 1)y = 0$$

a qual é dada por

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t} + c_3 e^t \ .$$

Os três primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada, logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação não-*homogénea. Para encontrar uma solução particular, substitui-se* $y(t) = c_3 e^t$ *na equação e determina-se o coeficiente* c_3*:*

$$\begin{aligned} & D(D^2 + 1)(c_3 e^t) = e^t \\ \iff \quad & 2c_3 e^t = e^t \\ \iff \quad & c_3 = \tfrac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Uma solução particular é, por exemplo, $y(t) = \frac{1}{2}e^t$ *para qualquer* $t \in \mathbb{R}$. *Conclui-se que a solução geral desta equação é*

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2}e^t \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(c) *Como se trata de uma equação linear, a solução geral de é da forma*

$$\{ \text{ solução particular } \} \ + \ \left\{ \begin{array}{c} \text{solução geral da equação} \\ \text{homogénea associada} \end{array} \right\} \ .$$

Para determinar uma solução particular, adopta-se o método dos coeficientes indeterminados. A função te^t *é aniquilada pelo operador diferencial* $(D-1)^2$. *Se* $y(t)$ *for solução particular da equação dada, i.e,*

$$D(D^2+1)y = te^t \ ,$$

então, aplicando $(D-1)^2$ *a ambos os membros, fica*

$$(D-1)^2 D(D^2+1)y = (D-1)^2 e^t = 0 \ .$$

Assim, vai-se procurar uma solução particular entre a solução geral da equação homogénea

$$(D-1)^2 D(D^2+1)y = 0$$

a qual é dada por

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t} + c_3 e^t + c_4 te^t \ .$$

Os três primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada, logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação não-*homogénea. Para encontrar uma solução particular, substitui-se* $y(t) = c_3 e^t + c_4 te^t$ *na equação e determina-se os coeficientes* c_3 *e* c_4*:*

$$\begin{array}{rl} & D(D^2+1)(c_3 e^t + c_4 te^t) = te^t \\ \iff & 2c_3 e^t + 4c_4 e^t + 2c_4 te^t = te^t \\ \iff & 2c_3 + 4c_4 = 0 \ \text{ e } \ 2c_4 = 1 \\ \iff & c_3 = -1 \ \text{ e } \ c_4 = \frac{1}{2} \ . \end{array}$$

Uma solução particular é, por exemplo, $y(t) = -e^t + \frac{1}{2}te^t$ *para qualquer* $t \in \mathbb{R}$. *Conclui-se que a solução geral desta equação é*

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t + -e^t + \frac{1}{2}te^t \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(d) *Como se trata de uma equação linear, a solução geral de é da forma*

$$\{ \text{ solução particular } \} \ + \ \left\{ \begin{array}{c} \text{solução geral da equação} \\ \text{homogénea associada} \end{array} \right\} \ .$$

Para determinar uma solução particular, adopta-se o método dos coeficientes indeterminados. A função 1 *é aniquilada pelo operador diferencial* D. *Se* $y(t)$ *for solução particular da equação dada, i.e,*

$$D(D^2+1)y = 1 \ ,$$

então, aplicando D *a ambos os membros, fica*

$$D^2(D^2+1)y = D1 = 0 \ .$$

Assim, vai-se procurar uma solução particular entre a solução geral da equação homogénea

$$D^2(D^2+1)y = 0$$

a qual é dada por

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t} + c_3 t \ .$$

Os três primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada, logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação não-*homogénea. Para encontrar uma solução particular, substitui-se* $y(t) = c_3 t$ *na equação e determina-se o coeficiente* c_3*:*

$$D(D^2+1)(c_3 t) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_3 = 1 \ .$$

Uma solução particular é, por exemplo, $y(t) = t$ *para qualquer* $t \in \mathbb{R}$*. Conclui-se que a solução geral desta equação é*

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t + t \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(e) *Como se trata de uma equação linear, a solução geral de é da forma*

$$\{ \text{ solução particular } \} \ + \ \left\{ \begin{array}{c} \text{solução geral da equação} \\ \text{homogénea associada} \end{array} \right\} \ .$$

Para determinar uma solução particular, adopta-se o método dos coeficientes indeterminados. A função $1 + \cos t$ *é aniquilada pelo operador diferencial* $D(D^2+1)$*, porque* D *aniquila* 1 *e* D^2+1 *aniquila* $\cos t$*. Se* $y(t)$ *for solução particular da equação dada, i.e,*

$$D(D^2+1)y = 1 + \cos t \ ,$$

então, aplicando $D(D^2+1)$ *a ambos os membros, fica*

$$D^2(D^2+1)^2 y = D(D^2+1)(1+\cos t) = 0 \ .$$

Assim, vai-se procurar uma solução particular entre a solução geral da equação homogénea

$$D^2(D^2+1)^2 y = 0$$

a qual é dada por

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t} + c_3 t + c_4 t \cos t + c_5 t \sin t \ .$$

Os três primeiros termos, sobre a chaveta, são solução da equação homogénea associada, logo não adiantam na pesquisa de uma solução particular da equação não-*homogénea. Para encontrar uma solução particular, substitui-se* $y(t) = c_3 t + c_4 t \cos t + c_5 t \sin t$ *na equação e determina-se os coeficientes* c_3, c_4 *e* c_5*:*

$$\begin{array}{ll} & D(D^2+1)(c_3 t + c_4 t \cos t + c_5 t \sin t) = 1 + \cos t \\ \Longleftrightarrow & c_3 - 2c_4 \cos t - 2c_5 \sin t = 1 + \cos t \\ \Longleftrightarrow & c_3 = 1 \ \text{ e } \ c_4 = -\frac{1}{2} \ \text{ e } \ c_5 = 0 \ . \end{array}$$

Uma solução particular é, por exemplo, $y(t) = t - \frac{t}{2}\cos t$ *para qualquer* $t \in \mathbb{R}$*. Conclui-se que a solução geral desta equação é*

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t + t - \frac{t}{2} \cos t \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(f) *Basta encontrar uma solução particular para a equação. A função* $e^{2t} \cos t$ *é aniquilada pelo operador diferencial* $(D-2)^2 + 1$*. Assim, uma solução particular da equação será uma solução da equação homogénea*

$$D(D^2+1)\left((D-2)^2+1\right) y = 0$$

A solução geral desta equação é dada por

$$y(t) = c_0 + c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 e^{2t} \cos t + c_4 e^{2t} \sin t$$

Os três primeiros termos são soluções da equação homogénea inicial por isso podemos fazer $c_0 = c_1 = c_2 = 0$. *Tendo em conta que*

$$(D^2+1)\left(e^2t\cos t\right) = 4e^{2t}\cos t - 4e^{2t}\sin t$$

e que

$$(D^2+1)\left(e^{2t}\sin st\right) = 4e^{2t}\cos t + 4e^{2t}\sin t\ ,$$

substituindo $c_3e^{2t}\cos t + c_4e^{2t}\sin t$ *na equação, obtém-se*

$$\begin{aligned}
& (D^2+1)D(c_3e^{2t}\cos t + c_4e^{2t}\sin t) = e^2t\cos t \\
\Longleftrightarrow\ & (D^2+1)\left((2c_3+c_4)e^{2t}\cos t + (2c_4-c_3)e^{2t}\sin t\right) = e^2t\cos t \\
\Longleftrightarrow\ & (4(2c_3+c_4)+4(2c_4-c_3))e^{2t}\cos t + (4(2c_4-c_3)-4(2c_3+c_4))e^{2t}\sin t = e^2t\cos t \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} 4c_3+12c_4 &= 1 \\ 4c_4-12c_3 &= 0 \end{cases} \\
\Longleftrightarrow\ & \begin{cases} c_3 &= \frac{1}{40} \\ c_4 &= \frac{3}{40} \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo,

$$y(t) = \frac{1}{40}e^{2t}\cos t + \frac{3}{40}e^{2t}\sin t$$

é uma solução particular. Conclui-se que a solução geral é

$$y(t) = c_0t + c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{1}{40}e^{2t}\cos t + \frac{3}{40}e^{2t}\sin t\ , \qquad \forall t\in\mathbb{R}\ .$$

□

(14) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais.

(a)
$$y^{(3)} + y^{(2)} + \dot{y} + y = 0\ ;$$

(b)
$$y^{(3)} + y^{(2)} + \dot{y} + y = 1 + e^t\sin t\ ;$$

(c)
$$y^{(2)} - \dot{y} - 2y = 2e^{2t} - 2\ ;$$

(d)
$$y^{(3)} - 2\pi y^{(2)} + \pi^2\dot{y} = 2\pi^3 t\ ;$$

(e)
$$y^{(3)} - 2y^{(2)} + 2\dot{y} = e^{-t}\cos t$$

.

(15) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^{(3)} + \dot{y} = e^t \\ y(0) = 1\ ,\ \dot{y}(0) = 1\ ,\ y^{(2)}(0) = \frac{1}{2}\ . \end{cases}$$

Resolução: *Pela alínea (b) do exercício 13, a solução geral da equação diferencial é*

$$y(t) = c_0 + c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{1}{2}e^t \qquad \forall t\in\mathbb{R}\ .$$

As derivadas desta solução são

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -c_1 \sin t + c_2 \cos t + \tfrac{1}{2}e^t \\ y^{(2)}(t) &= -c_1 \cos t - c_2 \sin t + \tfrac{1}{2}e^t \ .\end{aligned}$$

A condição inicial impõe que

$$\begin{aligned}1 &= y(0) &&= c_0 + c_1 + \tfrac{1}{2} \\ 1 &= \dot{y}(0) &&= c_2 + \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} &= y^{(2)}(0) &&= -c_1 + \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

donde se conclui que

$$c_0 = \frac{1}{2} \ , \qquad c_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad c_2 = \frac{1}{2} \ .$$

Logo, a solução deste problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}e^t \ , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

□

(16) Determine a solução da equação linear escalar

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + \dot{y} = b(t)$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, $y^{(2)}(0) = 1$, quando
(a) $b(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$;
(b) $b(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$;
(c) $b(t) = e^t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Resolução:

(a) *A equação homogénea pode ser escrita*

$$(D^3 + 2D^2 + D)y = 0 \quad \text{ou seja} \quad D(D+1)^2 y = 0$$

cuja solução geral é

$$y(t) = c_0 + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

onde $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*. As derivadas desta solução são:*

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} \\ y^{(2)}(t) &= c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \ .\end{aligned}$$

No valor inicial tem-se

$$\begin{aligned}y(0) &= c_0 + c_1 \\ \dot{y}(0) &= -c_1 + c_2 \\ y^{(2)}(0) &= c_1 - 2c_2 \ .\end{aligned}$$

A condição inicial impõe que

$$\begin{cases} c_0 + c_1 = 0 \\ -c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = -1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Logo, a solução do problema é

$$y(t) = 1 - e^{-t} - t e^{-t} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(b) *A solução geral de uma equação linear não homogénea pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada. Para obter uma solução particular da equação com $b(t) = t$, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados:*

- *t é solução de $D^2 y = 0$;*
- *se y é solução de $(D^3 + 2D^2 + D)y = t$, então*
$$D^2(D^3 + 2D^2 + D)y = D^2 t = 0 \ ;$$
- *procura-se uma solução particular da equação dada entre a solução geral da equação homogénea,*
$$D^2(D^3 + 2D^2 + D)y = 0 \quad \text{ou seja} \quad D^3(D+1)^2 y = 0 \ ,$$
que é
$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}} + c_3 t + c_4 t^2 \ ;$$
- *os termos sobre a chaveta constituem a solução geral da equação homogénea, logo não adiantam na busca de uma soluçãoparticular da equação não homogénea;*
- *toma-se como candidata para solução particular uma função da forma*
$$y(t) = c_3 t + c_4 t^2$$
a qual tem as seguintes derivadas
$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= c_3 + 2c_4 t \\ y^{(2)}(t) &= 2c_4 \\ y^{(3)}(t) &= 0 \ ; \end{aligned}$$
- *os coeficientes c_3 e c_4 determinam-se substituindo na equação:*
$$\begin{aligned} & y^{(3)} + 2y^{(2)} + \dot{y} = t \\ \iff \quad & 0 + 4c_4 + c_3 + 2c_4 t = t \\ \iff \quad & 4c_4 + c_3 = 0 \ \text{ e } \ 2c_4 = 1 \\ \iff \quad & c_3 = -2 \ \text{ e } \ c_4 = \tfrac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Obteve-se a solução particular
$$y(t) = -2t + \frac{1}{2}t^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

A solução geral da equação diferencial dada é
$$y(t) = \underbrace{-2t + \tfrac{1}{2}t^2}_{\text{sol. particular}} + \underbrace{c_0 + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}}_{\text{sol. geral da eq. hom.}} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

onde $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. As derivadas desta solução são:
$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -2 + t - c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} \\ y^{(2)}(t) &= 1 + c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \ . \end{aligned}$$

No valor inicial tem-se
$$\begin{aligned} y(0) &= c_0 + c_1 \\ \dot{y}(0) &= -2 - c_1 + c_2 \\ y^{(2)}(0) &= 1 + c_1 - 2c_2 \ . \end{aligned}$$

A condição inicial impõe que
$$\begin{cases} c_0 + c_1 = 0 \\ -2 - c_1 + c_2 = 0 \\ 1 + c_1 - 2c_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_0 = 4 \\ c_1 = -4 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

Logo, a solução do problema é

$$y(t) = -2t + \frac{1}{2}t^2 + 4 - 4e^{-t} - 2te^{-t} \qquad \forall t \in \mathbb{R} .$$

(c) *A solução geral de uma equação linear não homogénea pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada. Para obter uma solução particular da equação com $b(t) = e^t$, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados:*

- e^t *é solução de* $(D-1)y = 0$;
- *se* y *é solução de* $(D^3 + 2D^2 + D)y = e^t$, *então*

$$(D-1)(D^3 + 2D^2 + D)y = (D-1)e^t = 0 ;$$

- *procura-se uma solução particular da equação dada entre a solução geral da equação homogénea,*

$$(D-1)(D^3 + 2D^2 + D)y = 0$$

ou seja

$$(D-1)D(D+1)^2 y = 0 ,$$

que é

$$y(t) = \underbrace{c_0 + c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t}} + c_3 e^t ;$$

- *os termos sobre a chaveta constituem a solução geral da equação homogénea, logo não adiantam na busca de uma soluçãoparticular da equação não homogénea;*
- *toma-se como candidata para solução particular uma função da forma*

$$y(t) = c_3 e^t$$

que tem as seguintes derivadas

$$\dot{y}(t) = y^{(2)}(t) = y^{(3)}(t) = c_3 e^t ;$$

- *o coeficiente* c_3 *determina-se substituindo na equação:*

$$\begin{aligned} & y^{(3)} + 2y^{(2)} + \dot{y} = e^t \\ \iff & (c_3 + 2c_3 + c_3)e^t = e^t \\ \iff & c_3 = \tfrac{1}{4} . \end{aligned}$$

Obteve-se a solução particular

$$y(t) = \tfrac{1}{4}e^t , \qquad \forall t \in \mathbb{R} .$$

A solução geral da equação diferencial dada é

$$y(t) = \underbrace{\tfrac{1}{4}e^t}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{c_0 + c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t}}_{\text{sol. geral da eq. hom.}} \qquad \forall t \in \mathbb{R} .$$

onde $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *As derivadas desta solução são:*

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \tfrac{1}{4}e^t - c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 te^{-t} \\ y^{(2)}(t) &= \tfrac{1}{4}e^t + c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-t} + c_2 te^{-t} . \end{aligned}$$

No valor inicial tem-se

$$\begin{aligned} y(0) &= \tfrac{1}{4} + c_0 + c_1 \\ \dot{y}(0) &= \tfrac{1}{4} - c_1 + c_2 \\ y^{(2)}(0) &= \tfrac{1}{4} + c_1 - 2c_2 . \end{aligned}$$

A condição inicial impõe que

$$\begin{cases} \frac{1}{4}+c_0+\ \ c_1 &= 0 \\ \frac{1}{4}-c_1+\ \ c_2 &= 0 \\ \frac{1}{4}+c_1-2c_2 &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_0 &= 0 \\ c_1 &= -\frac{1}{4} \\ c_2 &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, a solução do problema é

$$y(t)=\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}te^{-t} \qquad \forall t\in\mathbb{R}\ .$$

□

(17) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y^{(3)}-2y^{(2)}+\dot{y}=-4+2t \\ y(0)=1\ ,\ \dot{y}(0)=0\ ,\ y^{(2)}(0)=2\ . \end{cases}$$

(18) Considere a equação diferencial escalar

$$y^{(4)}+y^{(3)}+y^{(2)}+\dot{y}=0\ .$$

(a) Determine a sua solução geral.
(b) Determine para que condições iniciais em $t=0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm solução convergente quando $t\to+\infty$.

Resolução:

(a) *O polinómio característico da equação é*

$$p(\lambda)=\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda$$

cuja factorização em monómios é

$$p(\lambda)=\lambda(\lambda+1)(\lambda-i)(\lambda+i)\ .$$

Comentário: *Para chegar a esta factorização, repara-se na raiz 0 e adivinha-se a raiz -1.* ♢

A solução geral (real) da equação é

$$y(t)=c_1+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

onde $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$.

(b) *Para que uma solução seja convergente quando* $t\to+\infty$*, ela não pode envolver as funções* $\cos t$ *nem* $\sin t$*. Procuram-se então as condições iniciais em* $t=0$ *que implicam que* c_3 *e* c_4 *sejam 0. Uma vez que*

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t \\ \dot{y}(t) &= -c_2e^{-t}-c_3\sin t+c_4\cos t \\ y^{(2)}(t) &= c_2e^{-t}-c_3\cos t-c_4\sin t \\ y^{(3)}(t) &= -c_2e^{-t}+c_3\sin t-c_4\cos t \end{aligned}$$

os valores em $t=0$ *são*

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1+c_2+c_3 \\ \dot{y}(0) &= -c_2+c_4 \\ y^{(2)}(0) &= c_2-c_3 \\ y^{(3)}(0) &= -c_2-c_4 \end{aligned}$$

donde sai que

$$\begin{aligned} c_1 &= y(0) + \dot{y}(0) - y^{(2)}(0) + y^{(3)}(0) \\ c_2 &= -\tfrac{1}{2}(\dot{y}(0) + y^{(3)}(0)) \\ c_3 &= -\tfrac{1}{2}(\dot{y}(0) + y^{(3)}(0)) - y^{(2)}(0) \\ c_4 &= \tfrac{1}{2}(\dot{y}(0) - y^{(3)}(0)) \ . \end{aligned}$$

Para que a solução do problema de valor inicial seja convergente quando $t \to +\infty$*, terá que ser*

$$\begin{aligned} 0 &= -\tfrac{1}{2}(\dot{y}(0) + y^{(3)}(0)) - y^{(2)}(0) \\ 0 &= \tfrac{1}{2}(\dot{y}(0) - y^{(3)}(0)) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\dot{y}(0) = -y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) \ .$$

O conjunto de todas as condições iniciais tais que as correspondentes soluções do problema de valor inicial são convergentes quando $t \to +\infty$ *é*

$$\{(y(0), \dot{y}(0), y^{(2)}(0), y^{(3)}(0)) = (a, b, -b, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \ .$$

□